

Doğrusal Olmayan Rüzgâr Etkisindeki Dairesel Kesitlerde Geliştirilmiş Sonlu Elemanlar Uygulaması

Serkan BEKİROĞLU*
Yusuf AYYVAZ**

ÖZ

Bu çalışmada p-yöntemine dayalı Sonlu Elemanlar Yöntemi (pSEY) ve Karma Fonksiyon Yöntemi ile zenginleştirilmiş bir sonlu eleman programı hazırlanmıştır. Program, kartezyen eksen takımında tanımlı doğrusal yerdeğiştirmelere ile doğrusal olmayan sürekli veya süreksiz yüklemelerin dikkate alınabildiği, eğrisel kenar ve/veya yüzeyle olabilen dörtgen prizma şeklindeki üç boyutlu bir sonlu elemana sahiptir. Program ile dairesel kesitli bir sanayi bacasının TS 498'e göre doğrusal olmayan ve düzgün rüzgâr yüklemeleri; pr EN 1991-1-4'e göre sadece doğrusal olmayan rüzgâr yüklemesi altında statik analizleri yapılmıştır. Sonuç olarak geliştirilen programın güvenilir sonuçlar verdiği ve doğrusal olmayan yük modellemesinin yapılabirliği sayesinde ilgili standartların ne kadar farklı sonuçlar verebildiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: p-yöntemi, sonlu elemanlar, karma fonksiyon yöntemi, eğrisel yüzeyle sonlu eleman, doğrusal olmayan yükleme, rüzgâr yüklemesi.

ABSTRACT

Implementation of Improved Finite Elements Over Circular Cross-Section Subjected to Effect of Non-Uniform Wind

In this study, a finite element program based on p-version finite element method (pFEM) and augmented by blending function method is coded. The program has a solid 3 dimensional finite element defined in cartesian coordinates, by which application of continuous or discontinuous nonlinear loads are taken into account and exact representation of curved edge and/or surface boundary is performed. With the aid of the coded program, a series of static analyses under defined wind loads for uniform and non-uniform loadings according to TS 498 and non-uniform loading according to pr EN 1991-1-4 are carried out on an industrial chimney with a circular cross-section. It is concluded that the coded program gives reliable results. Due to the capability of modeling of non-uniform loadings it is observed that the standards may lead to vastly different results.

Not: Bu yazı

- Yayın Kurulu'na 15.11.2013 günü ulaşmıştır.
- 30 Haziran 2015 gününe kadar tartışmaya açıktır.

* Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul - serkanb@yildiz.edu.tr

** Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul - yusufayvaz@gmail.com

Keywords: p-version finite element method (pFEM), finite elements, blending function method, finite element having curved surfaces, non-uniform loading, wind loading.

1. GİRİŞ

Yapıların tasarım öncesi analiz aşaması için modellenmesi hesap maliyeti ve zaman yönünden mümkün olduğunca ekonomik ölçüler içinde yapılmaya çalışılmaktadır. Bu nedenle yapının fiziki durumu ile üzerine gelen yükler basitleştirilmektedir. Unutulmamalıdır ki, basitleştirmeler beraberlerinde belli bir hata payı ile yapılmaktadırlar. Kullanılan bilgisayar kapasiteleri ile kurulan basitleştirilmiş model arasındaki ilişkiye bağlı olarak analiz süreci düşünüldüğünde bu hata payı büyüyebilmektedir. Örneğin, yapılar üzerine gelen rüzgâr yüklemelerinin çoğunlukla düzgün yayılı yük şeklinde dikkate alınmasının bundan ötürü olduğu düşünülebilir. Özellikle, rüzgâr yüklerinin eğrisel yüzeye sahip yapılar üzerinde düzgün olmayan bir yük olarak ele alınması hem tanımlama hem de analiz açısından zorunluluk derecesinde basitleştirme yapma maliyeti ortaya koyabilmektedir. Öyleki, 1) yüklemenin etkidiği alan boyunca içerdiği yük değerindeki değişkenliği ve 2) yapının eğrisel geometrisinin tam temsilinin yapılabilmesi ekonomik olmayan ileri bir modellemeyi zorunlu kılmaktadır.

Rüzgâr yükleri, yapıya bağlı olarak ya deneysel (rüzgâr tünelleri ile) veya sayısal yöntemler (hidro dinamik programlar) ile ya da ilgili standartlardan doğrudan temin şeklinde edinilmektedir. Standartlarda sunulan yükleme şekilleri genellikle yüksekliğe bağlı olarak verilen bir boyutlu eğrisel yük fonksiyonlarıdır (örneğin, TS 498 [1] ve pr EN 1991-1-4 [2]). Bu fonksiyonların üç boyutlu analiz programlarında tanımlanması yükün 1) iki boyutlu duruma dönüştürülmesi ve 2) eğrisel yük fonksiyonu olarak dikkate alınması ile mümkün olmaktadır. Bu şekilde yük tanımlaması bir çok analiz programında olmadığından tanımlama genellikle belli yükseklikler ve genişlikler için bir boyutlu eğrisel yük fonksiyonundan yük değeri okunması ile oluşturulan iki boyutlu düzgün yayılı yük veya doğrusal değişen yayılı yük şeklinde tercih edilmektedir. Rüzgâr yükünün tanımlanmasındaki bu zorluklar eğrisel geometriye sahip yapılarda daha da fazla olmaktadır. Geometrinin doğru temsili için ya geometrik bakımdan polinom derecesi artırılmış enterpolasyon fonksiyonları içeren sonlu eleman ile az elemanlı bir model ya da geometrik bakımdan doğrusal sonlu eleman ile çok elemanlı bir model kurmak durumunda kalınmaktadır. Eleman sayısının fazla olması, her eleman için eğrisel rüzgâr yüklemesinde yük okuması gerektireceğinden rüzgâr yüklemesini oluşturmak ayrıca güç olacaktır. Rüzgâr yüklemesinin doğru temsili öncelikle yüklemenin eğrisellik derecesini yansıtacak sayıda eleman ihtiyacı doğurmaktadır. Eleman ihtiyacının ayrıca elde edilecek sonuçların yakınsaması sürecinde artacağı ve bundan kaynaklanan eleman sayısındaki değişikliğin yükleme durumunda da zorunlu olarak değişiklik yaratacağı unutulmamalıdır.

Matematik modelleme yapılırken hata kaynakları genellikle geometrik tanımlamalardan ve kullanılacak temsil noktalarının sayısından ileri gelmektedir. İkinci hata kaynağı temsilde kullanılan nokta sayısının elde edilecek sayısal değerlerin değerlerindeki hata payının istenen oranın altına indirilene kadar artırılması ile giderilebilir. Sadece bu hata kaynağını gidermek için bile temsilde kullanılan nokta sayısında, özellikle gerilme yığılımlarından dolayı, artma olasılığı oldukça yüksektir. Bunun yanı sıra özellikle eğrisel geometrilere sahip fiziksel problemlerdeki geometrinin matematik modelde temsilinin sağlanması,

temsilde kullanılacak nokta sayısının artırılmasını talep eden diğer bir etmendir. Bu anlamda geometrik temsilin az noktayla istenilen hassasiyette olması için farklı yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bunlardan birisi geometrik sınırların temsiline polinom derecesi yüksek fonksiyonlardan oluşan enterpolasyon fonksiyonları kullanmaktır [3-21]. Bir diğeri ise geometrik sınırı matematik model temsiline [22-23] aynen kabul edebilen Karma fonksiyon kullanmaktır. Karma Fonksiyon Yöntemi'ni kullanarak eğrisel kenarlı ve/veya yüzeyli geometriye sahip sistemlerin matematik modellerinde geometrik olarak tam temsiline yapılabilmesi sağlanmaktadır. Böylelikle, kutupsal veya polar koordinat eksen takımlarına ihtiyaç duymadan doğrudan kartezyen eksen takımında modelleme yapılabilmektedir.

Bu çalışmada yukarıda ifade edilen zorluklar irdelenerek rüzgâr yüklemesinin eğrisel kesitlerde (örnek durum olarak dairesel kesitlerde) tanımlanması sürecinin kullanıcı açısından daha uygulanabilir yapılması hedeflenmektedir. Ayrıca bu sürecin sonlu elemanlar yöntemine uyarlaması da yapılacaktır. Dile getirilen bu amaç doğrultusunda öncelikle TS 498 [1] ve pr EN 1991-1-4 [2] standartlarına göre rüzgâr yükünün dairesel kesitlerde nasıl yük oluşturulduğu örneklendirilecektir. Sonra standartlara göre belirlenen yük fonksiyonlarından üç boyutlu analizlerde kullanılmak üzere nasıl iki boyutlu yük fonksiyonunun elde edildiği gösterilecektir. Daha sonra da bu yük fonksiyonunun nasıl Sonlu Eleman Yöntemi'nde yükleme haline dönüştürüldüğü ifade edilecektir. Eğrisel kesitlerde durumun örneklenmesi ve geometrik bakımdan eleman sayısının azaltılması amacıyla da Karma Fonksiyon Yöntemi tanıtılacak ve geometrik bakımdan dairesel kesite sahip sonlu eleman üretimi sunulacaktır. Son olarak dikkate alınan her iki standarta göre 17 Ağustos 1999 depreminde yıkılan Tüpraş sanayi bacası üzerinde üç boyutlu örnekleme yapılacaktır.

2. DAİRESEL KESİTLERDE STANDARTLARA GÖRE RÜZGÂR YÜKÜNÜN BELİRLENMESİ

Standartlarda dairesel kesitlerde rüzgâr yükleri rüzgâr hızı ile orantılı olarak verilmekte olup TS 498 [1]'de yüksekliğe göre rüzgâr hızı ve ona ait yük değişimi alt başlık 2.2'de verildiği gibidir. prEN 1991-1-4 [2]'de ise TS 498 [1]'den farklı olarak yük değişimi alt başlık 2.1'de verilmektedir.

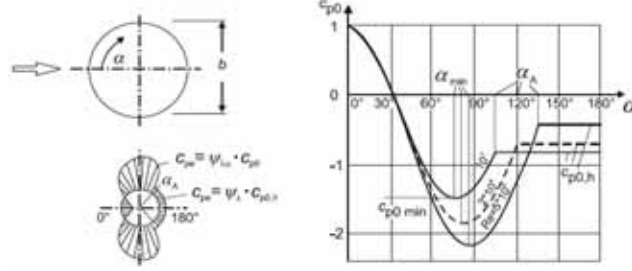
2.1. prEN 1991-1-4 [2]'e Göre Rüzgâr Yükünün Belirlenmesi

prEN 1991-1-4 [2]'de ilgili yapı yüzeyine etki edecek sırasıyla iç ve dış rüzgâr basıncı w_i , w_e

$$w_i = q_p(z_i) \cdot c_{pi}, w_e = q_p(z_e) \cdot c_{pe} \quad (1)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada, ilgili yapıya göre z_e dış basınç için referans yüksekliğini göstermekte olup $q_p(z_e)$ o referans yüksekliğindeki en yüksek rüzgâr basıncını, z_i iç basınç için referans yüksekliğini göstermekte olup $q_p(z_i)$ o referans yüksekliğindeki en yüksek rüzgâr basıncını göstermektedir. Ayrıca c_{pi} iç basınç için c_{pe} ise dış basınç için yüzey şekline ve yüzeyin açık veya kapalı yüzey olmasına bağlı basınç katsayılarıdır.

Dairesel kesitler için c_{pe} köşe etki faktörü $\psi_{\lambda a}$ ve serbest köşe akışına bağlı olmayan dış basınç katsayısı $c_{p,0}$ 'a bağlı olarak Şekil 1'de gösterildiği gibi hesaplanmaktadır. Burada bazı hesap detayları verilmemiş olup detaylar için kaynak [2]'ye bakılması gerekmektedir.

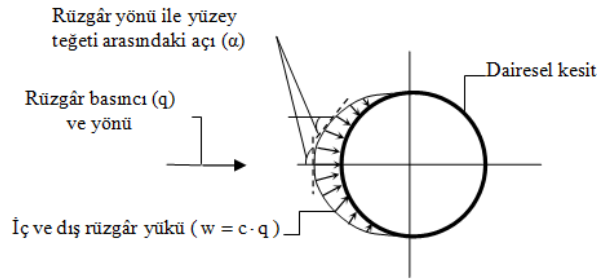


Şekil 1. Dairesel kesitler için c_{pe} katsayısı gösterimi [2]

Şekil 1'e göre c_{pe} katsayısının hesaplanması için diyagramdan kesitin her α açısı için $c_{p,0}$ okunması yapılması gerekmekte olup bir de daireesel kesite sahip yapının yüksek bir yapı olduğu düşünülüğünde ve birden fazla kesitte rüzgâr yükü belirlenmesi gerektiğinde c_{pe} hesaplamasının ne kadar zor olduğu açıktır. Bundan dolayı uygulamada basitleştirmeye gitme eğilimi doğmaktadır. Bu noktadan hareketle bu çalışma kapsamında geliştirilen bir program yardımıyla Şekil 1'de gösterilen α açısına bağlı $c_{p,0}$ grafiği bire bir sayısallaştırılmış olup her hangibi bir α açısı ve ilgili rüzgâr hızı için hesap edilecek olan Reynolds sayısına bağlı olarak $c_{p,0}$ değeri elde edilebilmektedir [24].

2.2. TS 498 [1]'e Göre Rüzgâr Yükünün Belirlenmesi

TS 498 [1]'de ilgili yapı yüksekliği için dış rüzgâr yükü TS 498 [1]'de Tablo 12'den belirlenir. Sonra TS 498 [1]'deki Tablo 13'den ilgili dış rüzgâr yüküne karşılık rüzgâr yönü ile açı yapan yüzeylerde iç ve dış rüzgâr basıncının toplam olarak verildiği değer elde edilir. Bu tabloda açılı yüzeyler için verilen değerden hareketle Şekil 2'de gösterilen yükleme durumu elde edilebilir.



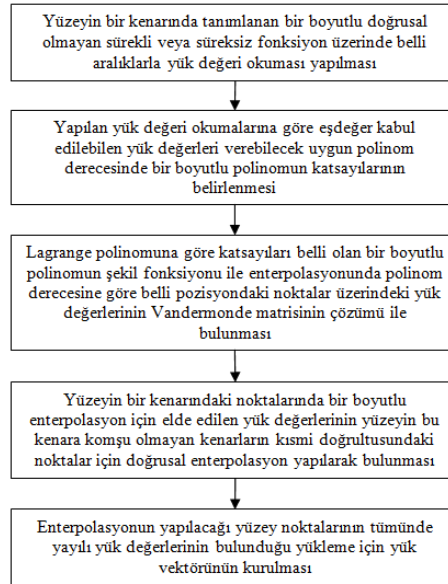
Örnek: Kule tipi yapılarda $q=1100$ (N/m^2) ise $w=1760 \sin \alpha$ (N/m^2)

Şekil 2. Rüzgâr yönü ile açı yapan yüzeye sahip kule tipi yapılar için rüzgâr yükü değeri oluşturma

3. DOĞRUSAL OLMAYAN YAYILI YÜK OLUŞTURMA

Her iki standarda bakıldığında rüzgâr yükünün eğrisel karakterli olduğu görülmektedir. Özellikle prEN 1991-1-4 [2]'e göre rüzgâr yükünün kesit boyunca oldukça değişken karakterli değerler içerebileceği hatta bazı noktalarda süreksizlikler içerileceği anlaşılmaktadır. TS 498 [1]'e göre dairesel kesitte, sadece doğrudan rüzgâra maruz bölümlerde basınç; prEN 1991-1-4 [2]'e göre dairesel kesitin hakim rüzgâr yönünde basınç; onun dışındaki yan bölgelerde basınç değerlerinden genelde daha yüksek değerli çekme; ve arka cephede yine çekme oluşmaktadır (bkz. Şekil 1). İç basınç etkisi de düşünüldüğünde basınç bölgesinden çekme bölgesine geçişlerde süreksizlikler oluşabileceği de dikkatten kaçmamaktadır.

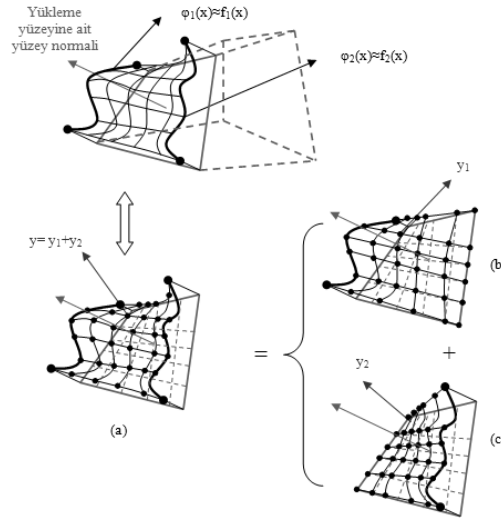
Kurulacak yükleme fonksiyonunun her durumu tanımlayabilmesi amacıyla polinom tabanlı eğri uydurma yöntemi yardımı ile ihtiyaç duyulan eğrilik derecesinde polinom kurulmaktadır. Bu polinomda yüksek mertebeli değişkenlerin katsayıları hesap edilerek yükleme durumu için belirlenmektedir. Bu katsayılar hedef olan parametreler olarak seçilmektedir. Böylece standartlardan elde edilen karmaşık ve değişken rüzgâr yükü değerleri kümesi yerine onları istenen güvenilirlik derecesinde temsil edebilecek polinomun katsayıları yükleme durumu olarak elde edilmektedir. Bir boyutlu olarak bir kesit için oluşturulan yük fonksiyonu farklı kotlara sahip iki kesit arasındaki yük fonksiyonlarının yükseklik doğrultusunda doğrusal enterpolasyonu ile yüzeye yayılı yük haline dönüştürülmektedir. Bu durum geliştirilen sonlu eleman programında yük verisi olarak sadece bir boyutlu fonksiyonların girilmesi sonrasında otomatik olarak yapılmaktadır. Bu şekilde tek boyutlu bir fonksiyon aracılığıyla yüzey yüklemesinin oluşturulmasına ait algoritma Şekil 3'de verilmektedir.



Şekil 3. Yüzeyin bir doğrultusunda tanımlanan bir boyutlu yayılı fonksiyon yüklemesinden kaynaklanan yüzeye yayılı fonksiyon yüklemesinin oluşturulması ve ona ait yük vektörünün oluşturulmasına ait algoritma

Eğer yüzeyin kenarlarının tümünde veya birkaçında farklı yüklemeye fonksiyonları tanımlı ise yukarıdaki algoritma ile ilgili kenarlar için ayrı ayrı yüzey boyunca enterpolasyon yapılır ve toplanır. Bu durum, yüzeyin komşu olmayan kenarlarında birer yüklemeye fonksiyonu olması durumu için düzlemsel yüzeylere sahip dörtgen prizmanın bir yüzeyinde örneklendirilerek Şekil 4’de verilmektedir.

Şekil 4’den görüldüğü gibi $f_1(x)$ ve $f_2(x)$, komşu olmayan kenarlardaki bir boyutlu bir yüklemeye fonksiyonlarını göstermektedir. Bu fonksiyonların sürekli bir polinom olduğu düşünülürken onların uygun polinom derecesinde enterpolasyonu yapıldığında elde edilecek $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ enterpolasyon fonksiyonları oldukça asıllarına yakın olacaktır. Bu durumda bir kenar üzerinde bulunan yüklemeye değerlerini veren $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ bir boyutlu enterpolasyon fonksiyonlarının kendilerine komşu olmayan kenarların kısmi doğrultusundaki noktalarda yüklemeye değerleri elde edilecek şekilde doğrusal olarak bir kez daha ayrı ayrı enterpolasyonu yapılmaktadır. (bkz. Şekil 4 (b) ve (c)). Daha sonra yüzey üzerindeki toplam yük değerlerini elde etmek için yüzey üzerinde tanımlanan her noktadaki yük değerleri toplanıp nihai yük değerleri elde edilmektedir (bkz. Şekil 4 (a)).



Şekil 4. Bir yüzeyinin komşu olmayan iki kenarındaki farklı bir boyutlu yüklemelere maruz dörtgen prizma eleman

Yüklemenin polinom katsayıları ile tanımlanabilmesinin sağladığı bazı artı durumlar bulunmaktadır. Rüzgâr yükü değerleri basınç ve çekme değeri içerebileceğinden geçiş noktasının belirlenip ona göre bir eleman üzerine tek cins yük durumunun tanımlanması zorunluluğunu ortadan kaldırmaktadır. Böylece bir eleman ağı kurulurken eleman üzerine zıt işaretli yük değerlerini barındırabilen yük fonksiyonu gelebilmekte ve eleman ağının sıklaştırılmasına gerek kalmamaktadır. Ayrıca eleman ağının yükseklik boyunca sıklaştırılmasına farklı sebepler ile ihtiyaç duyulduğunda yükseklik boyunca sıklaştırma yerlerinde kesit boyunca yeni yük değerleri belirlenmek istendiğinde sürecin sadece bir yükseklik

değerine bağlı olarak oldukça sade parametreler ile üretilebilecek olması veri güncellemesinde oluşacak yükü azaltmaktadır.

4. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNE GÖRE ELEMAN YAYILI YÜK VEKTÖRÜNÜN KURULUMU

Sonlu elemanlar yöntemine ait denklemi elde etmenin kullanışlı bir yolu virtüel iş metodunu kullanmaktır. Buna göre diferensiyel bir bağıntı olan denge denkleminin ve statik koşulların, tasarlanan keyfi bir fonksiyon ile çarpılması ile bu çarpımların ilgili sürekli ortamda integralinin alınması ile virtüel iş denklemi elde edilebilir. Burada sadece dış kuvvetlerin yaptığı işin (δW_{ext}), etki yüzeyindeki dış kuvvetlerin yaptığı işden oluştuğu düşünüldüğünde Denklem (2) elde edilir.

$$\delta W_{ext} = \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{t}^* dA \quad (2)$$

Dış kuvvetlerin etki yüzeyi; dörtgen prizma elemanda altı farklı yüzeyden biri, birkaçı veya tamamı olacaktır. Öyleki, Denklem (2)'deki integral, ilgili eleman yüzeyi sınırları içerisinde, yüzey normali doğrultusundaki \mathbf{t}^* yayılı yük altında alınacaktır. Buna göre dörtgen elemanın her yüzeyinde yükleme yapılabileceği düşünülerek yüzeylerin normali bulunmalı ve bu normal doğrultusunda yüzey sınırları içerisinde değişken veya düzgün yayılı yükün uygulanabileceği düşünülmelidir. Dörtgen prizmanın yüzeylerinin normalleri, ilgili yüzeydeki tanjant değişim vektörlerinin vektörel çarpımı ile bulunabilir. Tanjant değişim vektörleri; fiziksel koordinatlar ve doğal koordinatlar arasındaki değişim ilişkisinden elde edilir [24]. Fiziksel koordinatlar

$$\mathbf{X} = [X_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad X_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad X_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]^T \quad (3)$$

şeklinde doğal koordinatların birer fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Buna göre

$$\mathbf{t}^* dA = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} - \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \|\mathbf{t}^*\| d\xi_1 d\xi_2 \quad (4)$$

olmaktadır. Burada $\|\mathbf{t}^*\|$, dış yükün değeri olup düzgün yayılı yükte doğrudan uygulanacak olan yükün değerine eşit olan bir sabittir. Yüzeyde doğrusal olmayan bir fonksiyon yüklemesi olduğunda o yüzeydeki doğal koordinatlara bağlı bir yüzey fonksiyonu olmaktadır. Bu fonksiyon, yüzeyde belli noktadaki yük değerlerini enterpole eden bir enterpolasyon fonksiyonu haline dönüştürüldüğünde ve Denklem (4) Denklem (2)'de yerine yazılıp ayrıklaştırma yapıldığında, dörtgen prizma elemanın $\xi_3=1$ yüzeyindeki dış kuvvetlerin yaptığı işden hareketle

$$t_{\xi_3=1}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T(\xi) \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} - \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} (N_{\text{yüzey}}(\xi_1, \xi_2) \cdot t_{\text{yüzey}}) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5)$$

şeklinde yüzeyde fonksiyon yüklemesi için yük vektörü elde edilmektedir. Burada $N_{\text{yüzey}}$, yüzeyde tanımlanan enterpolasyona ait şekil fonksiyonlarını; $t_{\text{yüzey}}$, bu şekil fonksiyonlarının tanımlandığı noktalardaki yüzeyin yük değerlerini ifade etmektedir.

5. KARMA FONKSİYON (BLENDING FUNCTION) YÖNTEMİ

Eğrisel kenarlı ve/veya yüzeyli geometriye sahip sistemlerin matematik modellerinde geometrik olarak tam temsiline yapılabilmesi amacıyla ilgili geometrik şekil, Karma Fonksiyon Yöntemi ile sağlanmaktadır. Öyle ki, bu yöntemle göre geometrik temsilde kullanılacak enterpolasyon fonksiyonunda gerçek geometride bulunan doğrusal olmayan sınırın aynen enterpolasyonun o sınıra komşu olan kısmında benimsenmesine, içerilmesine olanak sağlanmaktadır. Karma Fonksiyon Yöntemi ile ilgili çalışmalar ilk defa Coons tarafından 1963 yılında yüzeylerin enterpolasyonunun bilgisayar destekli tasarımda kullanılmasıyla başlamıştır [25]. Karma Fonksiyon Yöntemi'nin iki ve üç eksenli fonksiyonların temsiline kullanımı için temel bağıntılar sunulmuştur [25]. İki eksenli eğrisel koordinat sisteminde Karma Fonksiyon Yöntemi ile enterpolasyonun sonlu elemanlarda kullanılan ağ oluşturmaya nasıl uyarlanacağı gösterilmiştir [26]. Sonrasında sonlu elemanlar yöntemi ile uygulamalar yapılmıştır [22-23, 27-34]. Ayrıca gerçek geometrinin enterpolasyonunda çok yetenekli eğrilikler kullanılabilmesine olanak sağlanmıştır [35-36]. Karma Fonksiyon Yöntemi'ne göre geometrik temsilde kullanılacak enterpolasyon fonksiyonunun üç boyutlu problemlerde nasıl tanımlandığı ve örnek olarak dairesel kenar ve/veya yüzeye sahip bir sonlu eleman için bu yöntemin nasıl çalıştırıldığı sırasıyla 5.1, ve 5.2 numaralı alt başlıklarda sunulmaktadır.

5.1. Üç Boyutlu Ortamda Karma Fonksiyon Yöntemi

Doğrusal olmayan kenarlara ait geometrik fonksiyon, doğal koordinatlara indirgenerek her üç koordinat ekseninde

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \varphi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{bmatrix}, (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in [-1, 1] \quad (6)$$

şeklinde ifade edilir. $\varphi_i, i = 1, \dots, 3$ fonksiyonları en genel durumda on iki kenar ve altı yüzey fonksiyonunun da doğrusal olmadığı ve hacim elemanın doğal koordinatlarda yeniden tanımlandığı geometri fonksiyonlarıdır. Karma Fonksiyon Yöntemi ile bu fonksiyonlar hacim elemanın enterpolasyon fonksiyonuna katılacaktır. Bu şekilde enterpolasyon fonksiyonunun kuruluşu şöyle sıralanabilir: hacim elemanın sekiz noktalı enterpolasyonu

için şekil fonksiyonlarının kurulumu Denklem (7)'de; doğrusal olmayan kenarların enterpolasyonunda kullanılacak olan bir boyutlu ve iki boyutlu (2B) enterpolasyon fonksiyonlarının kurulumu sırasıyla Denklem (8) ve (9)'da; doğrusal olmayan kenarlara ve yüzeylere ait enterpolasyon fonksiyonlarının kurulumu sırasıyla Denklem (10) ve (11)'de; köşe noktalarında kenar enterpolasyonları yapıldıktan sonra ek olarak oluşan köşe enterpolasyonlarının kurulumu Denklem (12)'de verilmektedir.

$$N_i^V = \frac{1}{8} (1 + \xi_i^j \xi_j) (1 + \xi_i^k \xi_k) (1 + \xi_i^m \xi_m),$$

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{matrix} \xi_i^t = (-1)^t, t=1,2, \\ [\xi_i^j, \xi_i^k, \xi_i^m] \in (-1,1) \end{matrix} \quad (7)$$

$$N_1^{1B} = 1/2(1 - \xi), N_2^{1B} = 1/2(1 + \xi), \xi \in [-1,1] \quad (8)$$

$$N_i^{2B} = \frac{1}{4} (1 + \xi_i^j \xi_m) (1 + \xi_i^k \xi_n),$$

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{matrix} \xi_i^t = (-1)^t, t=1,2, \\ [\xi_i^j, \xi_i^k, \xi_i^m] \in (-1,1) \end{matrix} \quad (9)$$

$$X_m^{F1} = N_i^{2B} \varphi_m(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$\begin{bmatrix} i \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 & \xi_1^4 & \xi_1^5 & \xi_1^6 & \xi_1^7 & \xi_1^8 & \xi_1^9 & \xi_1^{10} & \xi_1^{11} & \xi_1^{12} \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 & \xi_2^4 & \xi_2^5 & \xi_2^6 & \xi_2^7 & \xi_2^8 & \xi_2^9 & \xi_2^{10} & \xi_2^{11} & \xi_2^{12} \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3 & \xi_3^4 & \xi_3^5 & \xi_3^6 & \xi_3^7 & \xi_3^8 & \xi_3^9 & \xi_3^{10} & \xi_3^{11} & \xi_3^{12} \end{bmatrix}, \begin{matrix} \xi_i^t = (-1)^t, \\ t=1,2, \\ m=1,2 \end{matrix} \quad (10)$$

$$X_m^{F2} = N_j^{1B}(\lambda) \varphi_m(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ \lambda \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3 & \xi_3^4 & \xi_3^5 & \xi_3^6 \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 & \xi_1^4 & \xi_1^5 & \xi_1^6 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 & \xi_2^4 & \xi_2^5 & \xi_2^6 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3 & \xi_3^4 & \xi_3^5 & \xi_3^6 \end{bmatrix}, \begin{matrix} \xi_i^t = (-1)^t, \\ t=1,2, \\ m=1,2 \end{matrix} \quad (11)$$

$$X_m^V = N_j^{1B}(\xi_i) N_k^{1B}(\xi_j) N_n^{1B}(\xi_3) \varphi_m((-1)^j, (-1)^k, (-1)^n),$$

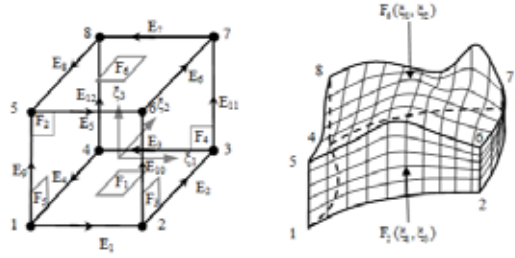
$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, m=1,2 \quad (12)$$

Denklem (13)'de geometrik enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. Burada X_m^{F1} doğrusal olmayan yüzeylerdeki koordinatların enterpolasyon fonksiyonunu göstermektedir. Yüzeyler, kesiştikleri kenarlarda ortak kenara sahip olduklarından birden fazla doğrusal

olmayan yüzey olması durumunda Denklem (13)'de doğrusal olmayan yüzeylere ait enterpolasyon fonksiyonları eklenirken ortak kenarlara ait ek enterpolasyonları yok etmek amacıyla sadece bir yüzey için çıkartma yapılır, bir kenar için birden fazla çıkartma yapılmaz. Üç boyutlu Karma Fonksiyon Yönteminin uygulamasına örnek olarak tüm yüzeyleri ve kenarları doğrusal olmayan bir hacim eleman Şekil 5'deki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \left(\sum_{i=1}^8 N^{V_i} \begin{bmatrix} X_1^i \\ X_2^i \end{bmatrix} \right) + \sum_{k=1}^6 \begin{bmatrix} X_1^{F_k} \\ X_2^{F_k} \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^{12} \begin{bmatrix} X_1^{E_j} \\ X_2^{E_j} \end{bmatrix} - \sum_{r=1}^8 \begin{bmatrix} X_1^{V_r} \\ X_2^{V_r} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Şekil 5'de hacim eleman her üç eksen doğrultusunda bölgesel dönüşüm ile birlikte [-1, 1] aralığında sekiz nokta yardımı ile enterpole edilmektedir. Bu enterpolasyonda doğrusal olmayan kenarlar ve yüzeyler bölgesel dönüşümde de aynı kalarak enterpolasyon fonksiyonuna aşağıdaki gibi katılmaktadır. Bu arada doğrusal olmayan kenarlar, [-1, 1] aralığının sınır değerleri için köşe noktalarının koordinatlarına; doğrusal olmayan yüzeyler, sınır kenarları için kenar fonksiyonlarına, sınır köşeleri için ise köşe noktalarının koordinatlarına sahip olmaktadır. Bu anlatıma ait denklemler kaynak [24]'de verilmektedir.

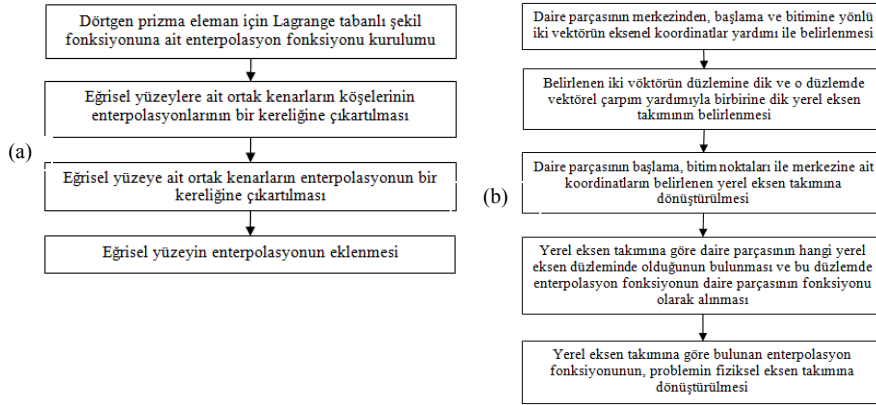


Şekil 5. Doğal koordinatlarda hacim sonlu eleman ile tüm yüzeyleri ve kenarları doğrusal olmayan sonlu elmanın geometrik enterpolasyon fonksiyonunun kuruluşu

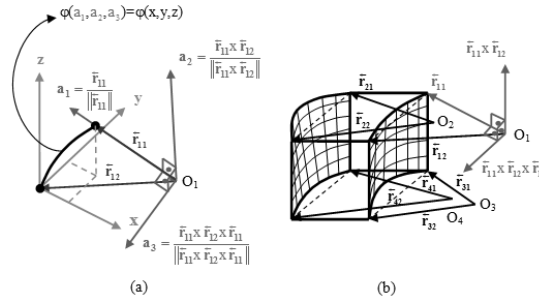
5.2. Karma Fonksiyon Yöntemi İle Dairesel Kenar Ve/Veya Yüzeylerin Temsili

Geliştirilen programda dairesel kenar ve yüzeylere ait eğrisel geometrinin Karma Fonksiyon Yöntemi ile geometrinin enterpolasyonuna katılması Şekil 6'da verilen algoritmalar ile sağlanmaktadır. Şekil 6(a)'da, Karma Fonksiyon Yöntemi'nin özet anlatımı algoritma halinde verilmektedir. Şekil 6(b)'de üç boyutlu bir dairesel eğriliğin iki boyutlu bir eğrilik haline getirildiği bir yerel eksen takımında enterpolasyonunun tanımlanıp tekrar koordinat dönüşümü uygulayarak üç boyutlu daireselliğin tanımlandığı eksen takımına çevrilmesi, algoritma ile gösterilmektedir. Şekil 7'de bu anlatım grafiksel olarak gösterilmektedir. Öyleki, Şekil 7(a)'da, üç boyutlu $\varphi(x,y,z)$ fonksiyonu ile gösterilen dairesel bir eğriliğin başlangıç ve bitiş noktalarını O_1 gibi bir eğrisellik merkezine göre işaretleyen \vec{r}_{11} ve \vec{r}_{12} vektörleri ile tanımlanan (a_1, a_2, a_3) yerel eksen takımına göre oluşturulan $\varphi(a_1, a_2, a_3)$ enterpolasyon fonksiyonu gösterilmektedir. Şekil 7 (b)'de ise Şekil 7 (a)'da tanımlanan dört farklı dairesel eğrisellikten oluşan dört kenar ve bunların olduğu iki yüzeyin bulunduğu bir sonlu elmanın şekli gösterilmektedir. Bu sonlu elemanın dairesel

tek yönlü bir eğriliğe sahip bir sürekli ortamda, örneğin bir sanayi bacasında tanımlı olduğu düşünülebilir.



Şekil 6. a) Karma Fonksiyon Yöntemi algoritması b) Dairesel eğriliğe ait enterpolasyon fonksiyonun kuruluşu



Şekil 7. a) Dairesel eğriliğe ait yerel eksen takımının oluşturulması ve enterpolasyon fonksiyonun kuruluşu, b) silindirik bir sonlu elemanın görünüşü ve dairesel eğriselliğe sahip kenar ve yüzeylerinin tanımlanması

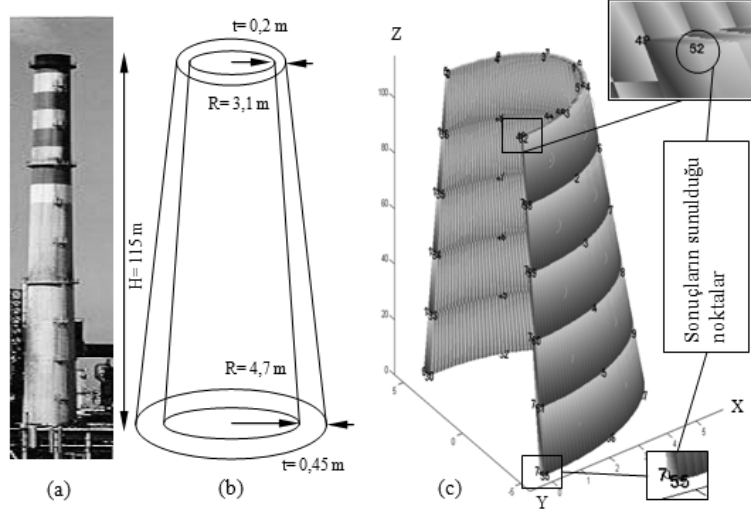
6. SAYISAL ÖRNEK

6.1. Problemin Tanımlanması

17 Ağustos 1999 yılında meydana gelen Kocaeli depremi sırasında yıkılan Tüpraş bacalarından biri, örnek olarak dikkate alınmaktadır. Şekil 8'de verilen bacanın yüksekliği 115m olup; yarıçapı yüksekliği boyunca doğrusal azalan dairesel halka şeklinde bir yatay kesite sahiptir. Elastisite Modülü $3,0 \cdot 10^{10}$ N/m², poisson oranı 0,2 dir.

Yükleme durumu olarak TS 498 [1]'e göre belirlenen düzgün yayılı rüzgâr yüklemesi ile, hem TS 498 [1] hem de prEN 1991-1-4 [2]'e göre belirlenen doğrusal olmayan rüzgâr

yüklemeleri dikkate alınacaktır. Her üç rüzgâr yükü de simetrik olduğundan sanayi bacasının matematiksel modeli, Şekil 8'de görüldüğü gibi bacanın yarısı üzerinde kurulmaktadır.

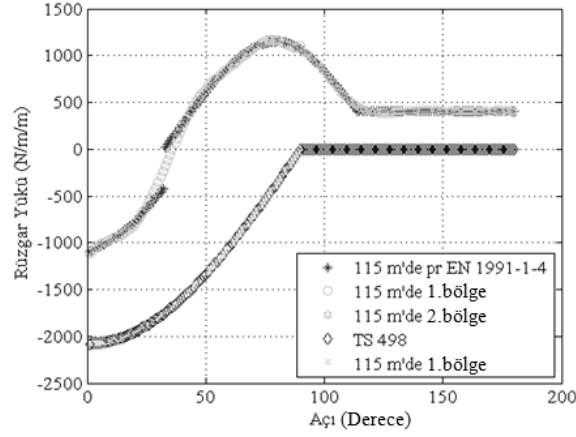


Şekil 8. Sanayi Bacasının a) fotoğrafı [37], b) geometrisi ve c) simetrik kısmının yükseklik boyunca beş, yatay kesit boyunca altı ve kalınlık boyunca bir parçaya bölündüğü matematiksel modeli

6.2. Doğrusal Olmayan Yüklemenin Belirlenmesi

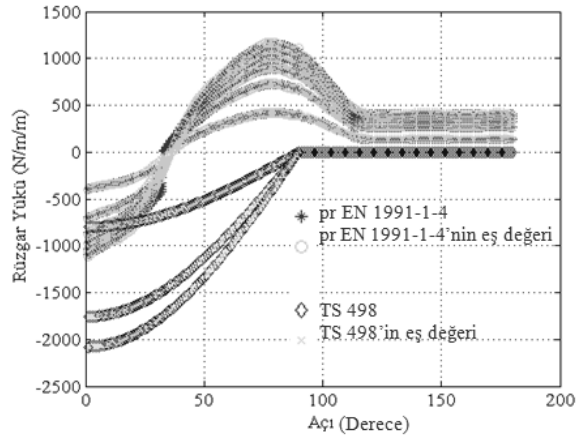
Rüzgâr yüklemesi durumu hem pr EN 1991-1-4 [2]'e göre hem de TS 498 [1]'e göre belirlenecektir. Rüzgâr yüklemesi rüzgâr hızına doğrudan bağlıdır. Bunun için Türkiye Rüzgâr Haritası'na (bkz. [24]) bakılarak sanayi bacasının bulunduğu yerdeki 50 m yüksekliğindeki rüzgâr hızı değerinin 7 m/sn olduğu tespit edilmiştir. Hem pr EN 1991-1-4 [2]'e göre hem de TS 498 [1]'e göre yüklemeye önemli bir diğer husus sanayi bacasının yüksekliğidir. Bacanın nihai yüksekliğinin doğrudan dikkate alınması yerine ağ yapısına bağlı olarak yükseklik boyunca her ağ bölümlenmesine göre rüzgâr yükü belirlenecektir. Hem pr EN 1991-1-4 [2]'in hem de TS 498 [1]'in yatay kesitteki yükleme değerlerine örnek olarak sanayi bacasının en üst kotundaki yatay kesitteki yüklemelerin kendileri ve polinom tabanlı eşdeğerleri Şekil 9'da; ağ yapısına bağlı olarak yükseklik boyunca değişen yatay kesitteki yükleme durumu Şekil 10'da verilmektedir. Ayrıca dairesel kesitli sanayi bacası için yüklemenin kendisi ve polinom tabanlı eşdeğeri yatay kesit üzerinde her iki yükleme durumuna göre şekli Şekil 11'de verilmektedir.

Şekil 9'dan görüldüğü gibi yüklemeler, simetri dolayısıyla sıfırdan yüz seksen dereceye kadar tanımlanmaktadır. Yüklemelerin ve sanayi bacasının simetrik olması nedeniyle baca problemi simetrik olarak dikkate alınmaktadır. Hem TS 498 [1] hem de pr EN 1991-1-4 [2]'de verilen yüklemelerin eğriliklerinin farklı olması ve hatta süreksizlik içermeleri dolayısıyla polinom tabanlı eşdeğerleri dikkate alınmaktadır.

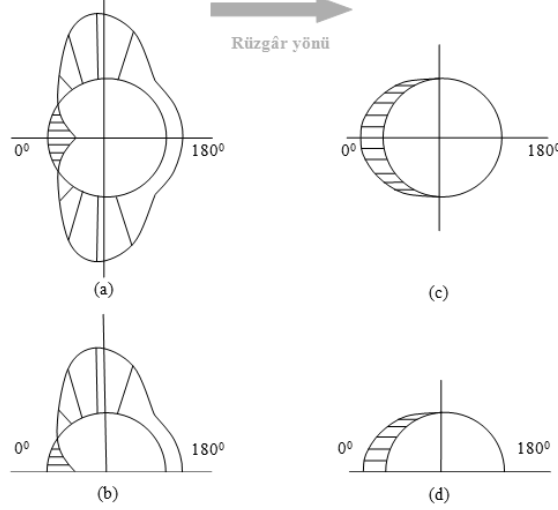


Şekil 9. pr EN 1991-1-4 [2] ve TS 498 [1]'e göre sanayi bacasının 115 m kotunda yatay kesitindeki simetrik kısmında elde edilen yüklemeler ve onların entropolasyon yapılan eşdeğerleri

Şekil 10'dan görüldüğü gibi yükseklik boyunca beş eleman mevcuttur. TS 498 [1]'e göre yüklemelerde hiç çekme etkisi bulunmamakta ve basınç etkisi de pr EN 1991-1-4 [2]'e göre yüksekliğe bağlı olarak yaklaşık %50 ile %100 arasında değişen bir oran ile daha fazla olmaktadır. pr EN 1991-1-4 [2]'de çekme etkisinin etki alanı basınç etkisinin etki alanına göre yaklaşık beş kat fazladır. Bundan dolayı iki standarda göre elde edilen sonuçlar bir birine göre oldukça farklılık arz edecektir.



Şekil 10. pr EN 1991-1-4 [2] ve TS 498 [1]'e göre sanayi bacasının yükseklik boyunca 5 eleman kullanıldığında ağın her elemanın bulunduğu kotta yatay kesitindeki simetrik kısmında elde edilen yüklemeler ve onların entropolasyon yapılan eşdeğerleri



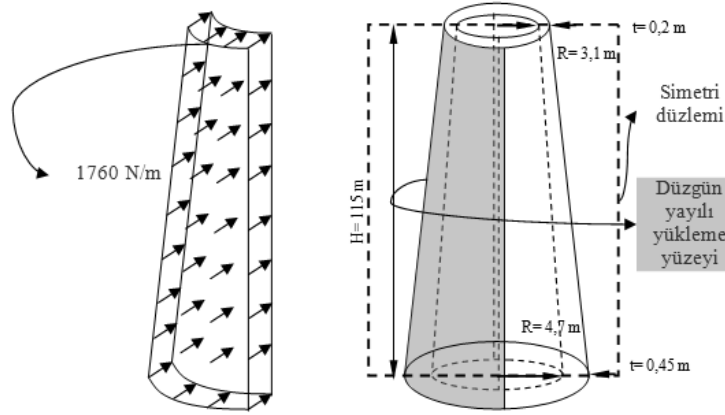
Şekil 11. a) pr EN 1991-1-4 [2]'e, b) pr EN 1991-1-4 [2] de simetrik kısma, c) TS 498 [1]'e, d) TS 498 [1]'de simetrik kısma karşı gelen dairesel kesitteki yüklemeye şekilleri

Şekil 11'den görüldüğü gibi TS 498 [1]'de verilen yüklemeye durumu sinusoidal olup ilk doksan derecelik kısım (1. bölge) için üçüncü derece bir polinom ile oldukça iyi bir yaklaşıklık ile analizlerde de kullanılacak şekil de temsil edilebilecektir. İkinci doksan derecelik kısımda (2. bölge) yüklemeye TS 498 [1]'de belirtilmemektedir. pr EN 1991-1-4 [2]'e göre verilen yüklemeye durumu tek parçalı bir eğri olmayıp ayrıca formuda tek bir eğrilik durumunu içermemektedir. Bundan dolayı iki parçalı ayrı iki eğri ile temsil edilmesi oldukça kabul edilebilir görünmektedir. pr EN 1991-1-4 [2]'de ilk doksan dereceye karşılık gelen kısım sekizinci dereceden bir polinom ile temsil edilirken ikinci doksan derecelik kısım altıncı dereceden bir polinom ile temsil edilmektedir.

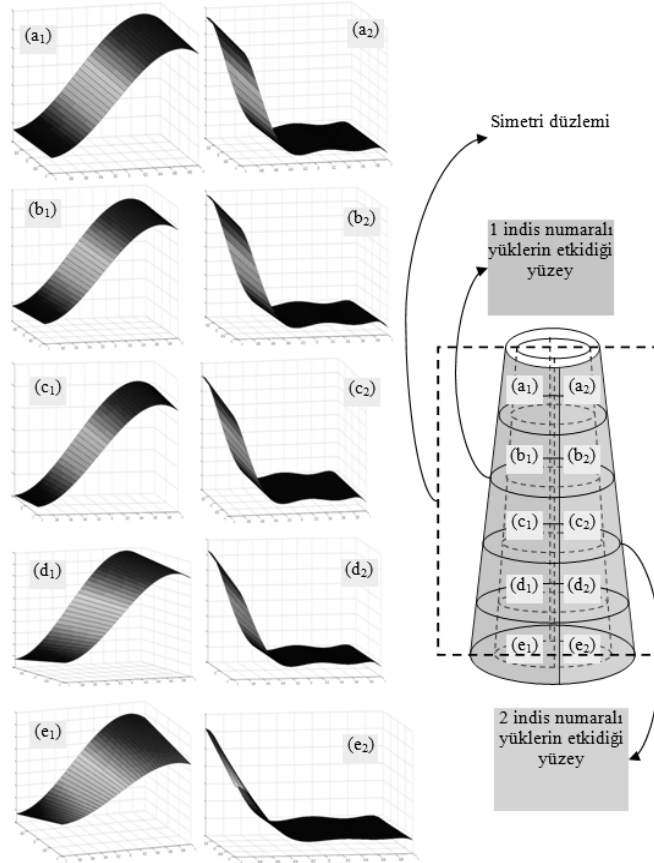
TS 498 [1]'e göre rüzgâr yükünün doğrudan uygulanması yerine basitleştirme yapılarak düzgün yayılı yük olarak uygulanması, ağ yapısından bağımsız olmak ve kolaylık sağlamak amacıyla tercih edilebilmektedir. Bu durum bu çalışmada dikkate alınan sanayi bacası için dikkate alınmakta ve düzgün yayılı yükün değeri Şekil 12'de verilmektedir.

Örnek yüklemeye durumu olarak prEN 1991-1-4 [2]'e göre belirlenen rüzgâr yüklemesi, bu çalışmada kullanılmayacak olan ancak gösterimi kolay olduğu için seçilen 9. ağ yapısı (bkz. Tablo 2) için Şekil 13'de verilmektedir. Şekil 13'den görüldüğü gibi, prEN 1991-1-4 [2]'e göre sanayi bacası yüzeyinde elde edilen yüklemeye yüzeye yayılı olup eğriliği iki parçalı olarak, tek doğrultuda standartın sunduğu eğriliğe eşdeğer polinom tabanlı sekizinci ve altıncı dereceden eğriliklere sahip olacaktır.

Düzgün yayılı yüklemeye altında bacanın simetrik kısmının sonuçlarının hem ANSYS programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması yapılacak hem de kurgulanan sonlu eleman için yakınsamanın sağlandığı ağ yapısına karar verilecektir. Elde edilecek olan bu ağ yapısı bir sonraki örnek olan; n. dereceden doğrusal olmayan yayılı yüklemeye örnek bir yayılı yüklemeye altındaki sanayi bacasının simetrik kısmının yakınsamış ağ yapısını belirlemede temel ağ yapısı olacaktır.



Şekil 12. TS 498 [1]’e göre belirlenen düzgün yayılı rüzgâr yükünün sanayi bacasının yarı simetrik kısmında bulunan eleman yüzeylerinde gösterilimi



Şekil 13. prEN 1991-1-4 [2]’e göre belirlenen rüzgâr yükünün sanayi bacasının yarı simetrik kısmında bulunan eleman yüzeylerinde gösterilimi

6.3. ANSYS Programı ile Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacasının Statik Analizi

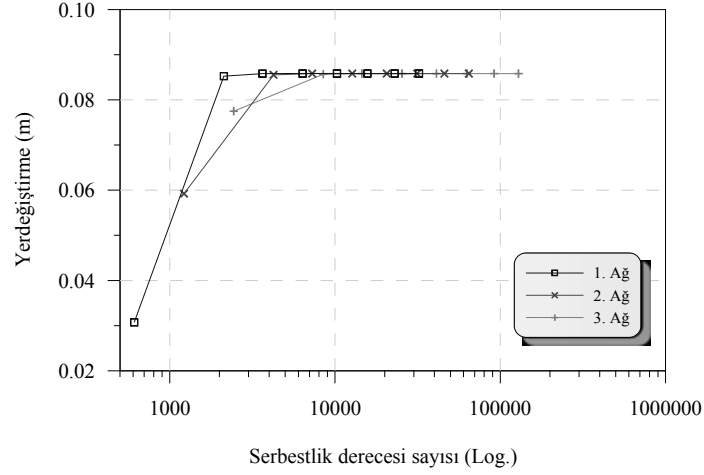
Bu çalışmada geliştirilen sonlu elemanlar programı ve ANSYS programı farklı ağ yapıları ile çözüme ulaştığından her biri için ayrı bir süreç dikkate alınmıştır. Bu nedenle, önce, ön bir çalışmayla belirlenen ve Tablo 1’de verilen sekiz farklı ağ yapısı için ANSYS programı ile irdeleme yapılacaktır. Tablo 1’den görüldüğü gibi, ağ yapıları, hem yatay kesitte hem de düşeyde mümkün olduğunca minimum eleman sayısı oluşturulacak şekilde belirlenmeye çalışılmıştır. Yatay kesit boyunca her ağ türünde 20 elemana bölümlenimin, geometrik temsilin mümkün olduğunca en iyi ve en asgari sonlu eleman sayısına ihtiyaç doğuracak şekilde yeterli olduğu yapılan ön çalışmalarda görülmüştür. Yatay kesit boyunca eleman sayısının belli bir eşik değerinden az olmasının, yükseklik boyunca eleman sayısı artırılrsa bile, gerilme değerlerindeki yakınsama hızında doğru değere ulaşamayacak düzeyde yavaşlamaya neden olduğu görülmüştür.

Tablo 1. Düzgün yayılı yük etkisindeki sanayi bacasının yarı simetrik kısmında ANSYS programında dikkate alınan farklı ağ yapıları

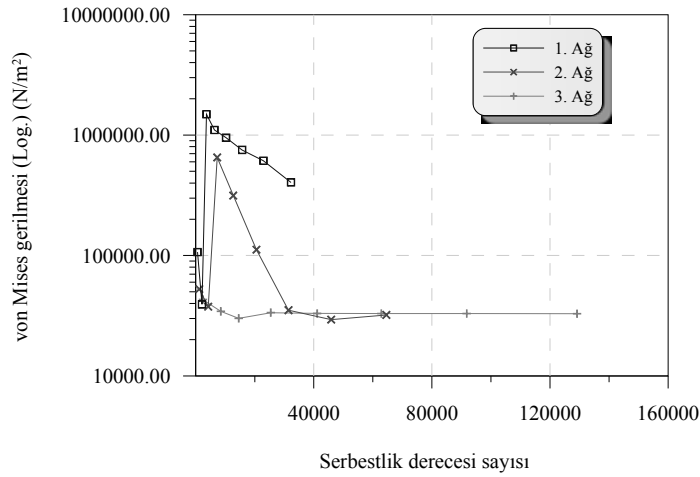
Ağ no	Eleman sayısı				Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.*
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık boyunca	Ağdaki toplam		
1	20	5	1	100	1-8	32290
2	20	10	1	200	1-8	64580
3	20	20	1	400	1-8	129160
4	20	40	1	800	1-8	258320
5	20	60	1	1200	1-8	387480
6	20	100	1	2000	1-8	645800
7	20	200	1	4000	1-7	918000
8	20	400	1	8000	1-5	822800

*S.D.S: Serbestlik derecesi sayısı

Tablo 1’deki ağ türlerinde kalınlık boyunca bir eleman kullanılmasının nedeni, kullanılan sonlu eleman türü için kalınlık boyunca bir elemanın yeterli olmasıdır. Tablo 1’de verilen sekiz farklı ağ türünün her birinin kendisine karşılık gelen polinom derecesine kadar artım yapılarak elde edilen von Mises, gerilme değeri ile radyal doğrultudaki yerdeğiştirme değeri, 52 nolu nokta (bkz. Şekil 10) için sunulacaktır. İlk üç ağ türü için yerdeğiştirme ve von Mises gerilmesi değerleri sırası ile Şekil 14 ve Şekil 15’de verilmektedir.



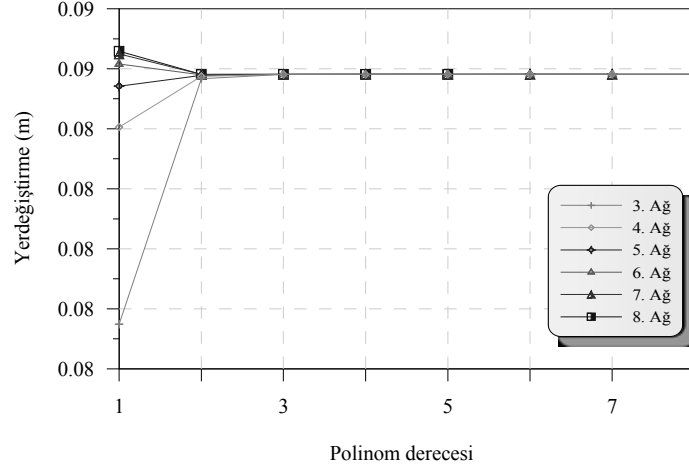
Şekil 14. İlk üç ağ için sanayi bacasının serbestlik derecesi sayılarına göre 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen yerdeğiştirmeleri



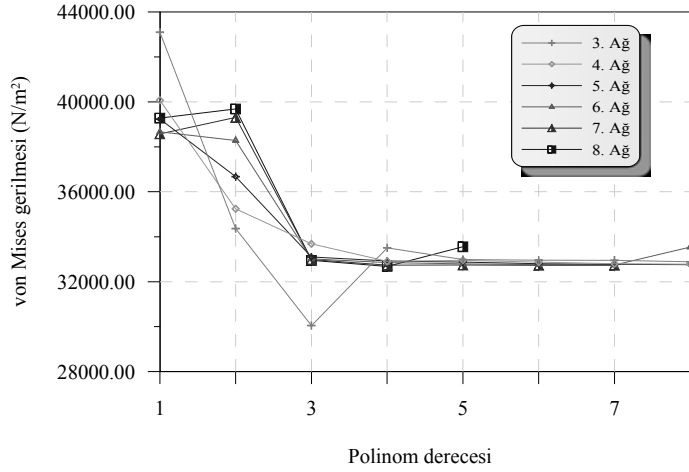
Şekil 15. İlk üç ağ için sanayi bacasının serbestlik derecesi sayılarına göre 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen von Mises gerilmeleri

Şekil 14'de görüldüğü gibi, yakınsamış olduğu görülen yaklaşık 0.086 m yerdeğiştirme değeri, ağ yapısı ve polinom derecesi değiştirilerek bir çok kez elde edilebilmektedir. Bu değer ilk olarak 2. ağ yapısında polinom derecesi üç iken elde edilmektedir. Şekil 15'den görüldüğü gibi, 3. ağ - p=6 ve 2. ağ - p=8 durumunda serbestlik derecesi sayıları bir birine yakın sayılabilir olduğu düşünülürse von Mises gerilmesinin oldukça örtüştüğü görülmektedir. Örtüşmenin sağlandığı her iki durum yakınsamanın sağlanabileceği ağ yapısı ve polinom derecesine örnek oluşturmaktadır. İlk üç ağ yapısında yapılan

irdemelerde eşik ağ yapısı olarak 3. ağ yapısından başlanması gerektiği anlaşılmaktadır. Bundan dolayı 3. ağ'dan 8. ağ'a kadar olan ağ yapılarında yakınsama durumları bundan sonra irdelenecektir. Bu son altı ağ yapısı için yerdeğiştirme ve von Mises gerilmesi sonuçları, sırasıyla, Şekil 16 ve Şekil 17'de verilmektedir.



Şekil 16. Son altı ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen yerdeğiştirmeleri



Şekil 17. Son altı ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının ANSYS programından elde edilen von Mises gerilmeleri

Şekil 16'dan görüldüğü gibi, polinom derecesi iki değerinden sonra her ağ yapısı için yakınsama elde edilmektedir. Şekil 17'den görüldüğü gibi, tüm ağ yapılarında, von Mises gerilmesinde 5. ağ'dan itibaren polinom derecesi 3 değerinden sonra yakınsama sağlanmaktadır.

6.4. Geliştirilen Program ile Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacasının Statik Analizi

ANSYS programı yardımıyla dikkate alınan yükleme altında yakınsamış yerdeğiştirme ve gerilme değerleri, en az serbestlik derecesi ile belirtilmeye çalışılmıştır. Bu çalışmada geliştirilen sonlu elemanlar programında, elemanların gerçek geometrik durumu dikkate alınabildiğinden ANSYS sonuçları ile doğrudan bir karşılaştırma yerine dolaylı bir karşılaştırma yoluna gidilmektedir. Bu amaçla, kurgulanan sonlu elemanlar için iki aşamalı ağ sıklaştırması yapılacaktır. Birinci aşamada simetrik sanayi bacasının yatay kesit boyunca ihtiyaç duyulan en az eleman sayısı belirlenmeye çalışılacaktır. Öyleki, geometrinin tam olarak Karma Fonksiyon Yöntemi ile tanımlanmasına rağmen yerdeğiştirme ve gerilme alanında ihtiyaç duyulan eleman sayısının belirlenmesi amacıyla yatay kesitte ağ sıklaştırması yapılacaktır. Örnek durum olarak yatay kesit boyunca sırasıyla iki, dört ve altı eleman dikkate alınırken yükseklik boyunca beş eleman ve kalınlık boyunca bir eleman dikkate alınacaktır. Bu duruma karşılık gelen ağ yapıları Tablo 2'de verilmektedir. İkinci aşamada sanayi bacasının simetrik kısmının yükseklik boyunca ihtiyaç duyulan en az eleman sayısı belirlenmeye çalışılacaktır. Bu duruma ait ağ sıklaştırma durumu ise birinci aşamadan sonra belirlenecektir.

Yatay kesit boyunca yakınsama durumu belirlendikten sonra yükseklik boyunca olan durumun belirlenmesi amacıyla, yatay kesit boyunca eleman sayısı altı; kalınlık boyunca bir; yükseklik boyunca eleman sayısı sırası ile beş, on ve yirmi olarak dikkate alınacaktır. Bu duruma karşılık gelen ağ yapıları Tablo 3'de verilmekte olup bu ağ yapıları ile elde edilen yerdeğiştirme, von Mises gerilmesi değerleri ANSYS programı yardımıyla hp-yöntemine göre elde edilen sonuçlar ile birlikte, örnek durum olarak sadece 13. ağ için, sırasıyla Şekil 18 ve Şekil 219'da verilmektedir.

Tablo 2. Sanayi bacasının simetrik kısmında, geliştirilen program için, yatay kesit boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları

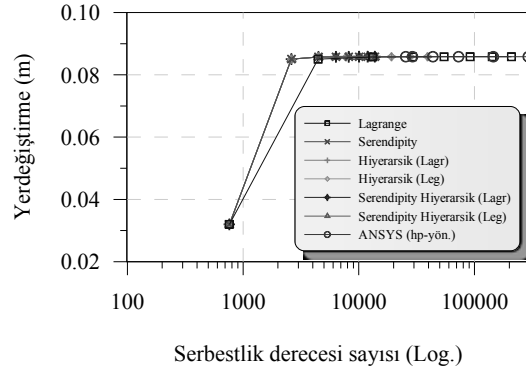
Ağ no	Eleman sayısı			Ağdaki toplam	Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.*
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik Boyunca	Kalınlık boyunca			
9	2	5	1	10	1-10	33550
10	4	5	1	20	1-8	34920
11	6	5	1	30	1-8	52200

*S.D.S: Serbestlik derecesi sayısı

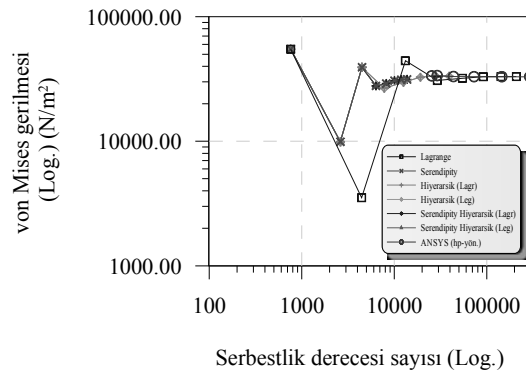
Tablo 3. Düzgün yayılı yük etkisindeki sanayi bacasının simetrik kısmında geliştirilen program için yükseklik boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları

Ağ no	Eleman sayısı				Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.*
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik Boyunca	Kalınlık boyunca	Ağdaki toplam		
11	6	5	1	30	1-8	52200
12	6	10	1	60	1-8	104400
13	6	20	1	120	1-8	208800

*S.D.S: Serbestlik derecesi sayısı



Şekil 18. 13. ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen yerdeğiştirmesi



Şekil 19. 13. ağ için sanayi bacasının 52 nolu noktasının geliştirilen program yardımıyla belirlenen von Mises gerilmesi

Şekil 18'den görüldüğü gibi, 13. ağ yapısı için elde edilen yerdeğiştirme değerleri ANSYS programı ile elde edilen değerlere yakınsamaktadır. Şekil 19'dan görüldüğü gibi, von Mises gerilme sonuçları ile 13. ağ için ANSYS programı yardımıyla belirlenen sonuçlar örtüşmektedir.

6.5. Kartezyen Koordinatlarda ve Eğrisel Yüzeyde Doğrusal Olmayan Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacası

Burada hem doğrusal olmayan yüklemeler için yakınsamanın sağlandığı ağ belirlenecek, hem de her iki standarda göre elde edilecek sonuçlar karşılaştırılacaktır. Bir önceki örnekte yakınsayan sonuca en az serbestlik derecesi sayısı ile ulaşılabilen sonlu elemanlardan biri olan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman tipi burada tek tip olarak dikkate alınacaktır. Yatay kesitteki ağ çalışması için, Tablo 4'de verilen 14., 15., 16. ve 17. ağ yapıları kullanılacaktır. İlk olarak prEN 1991-1-4 [2] sonra TS 498 [1]'e göre sonuçlar sunulacaktır.

Tablo 4. Sanayi bacasının yarısı için kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için yatay kesit boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları

Ağ no	Eleman sayısı				Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.*
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık Boyunca	Ağdaki toplam		
14	8	5	1	40	1-10	23565
15	10	5	1	50	1-10	29385
16	12	5	1	60	1-10	35205
17	14	5	1	70	1-10	41025

*S.D.S: Serbestlik derecesi sayısı

6.5.1. Geliştirilen Program ile prEN 1991-1-4 [2]'e Göre Elde Edilen Doğrusal Olmayan Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacasının Statik Analizi

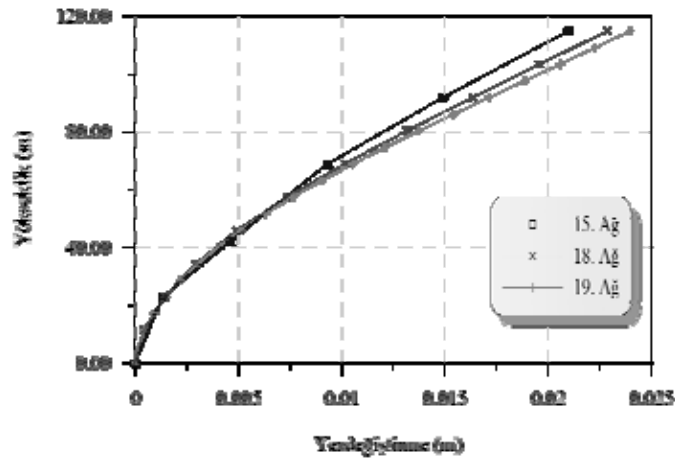
prEN 1991-1-4 [2]'e göre yatay kesitte ağ sıklaştırması sonuçlarıyla değerlendirildiğinde, 15. ağ'ın (yatay kesitte 5 elemanın) yeterli olacağı belirlenmektedir. Tablo 5'de verilen veriler kullanılarak yükseklik boyunca ağ sıklaştırması sonucu prEN 1991-1-4 [2]'e göre elde edilen yükseklik boyunca y-koordinatının 3,3 m olduğu noktalardaki yerdeğiştirme ve gerilme sonuçları sırasıyla Şekil 20 ve Şekil 21'de verilmektedir.

Şekil 20'de en büyük yerdeğiştirmenin görüldüğü 115m kotundaki yerdeğiştirme değerinde 19. ağdaki değer 18. ağdaki değere yaklaşık % 5 yakınlıkta olduğu ve yaklaşık 0,024 m olduğu görülmektedir. Şekil 21'de en büyük von Mises gerilmesinin olduğu 0 m kotundaki von Mises gerilmesi değerinde 19. ağdaki değer 18. ağdaki değere yaklaşık % 5 yakınlıkta olduğu ve değerinin yaklaşık 850000 N/m² (0,85 MPa) olduğu görülmektedir.

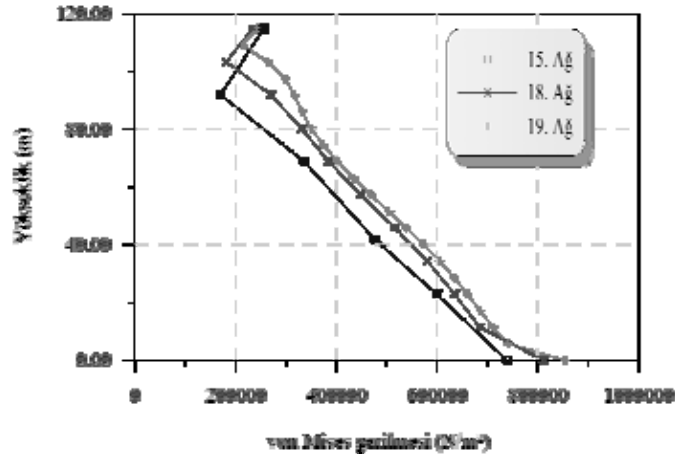
Tablo 5. Sanayi bacasının yarısı için kurgulanan Lagrange tabanlı hiyerarşik sonlu eleman için yükseklik boyunca çeşitlendirilen ağ yapıları

Ağ no	Eleman sayısı			Ağdaki toplam	Polinom derecesi	Maksimum S.D.S.*
	Yatay kesit boyunca	Yükseklik boyunca	Kalınlık Boyunca			
15	10	5	1	50	1-10	29385
18	10	10	1	100	1-10	58770
19	10	20	1	200	1-10	117540

*S.D.S: Serbestlik derecesi sayısı



Şekil 20. prEN 1991-1-4 [2]’e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının $y=3.3$ m için yerdeğiştirmesinin farklı ağ yapısı için yükseklik boyunca değişimi

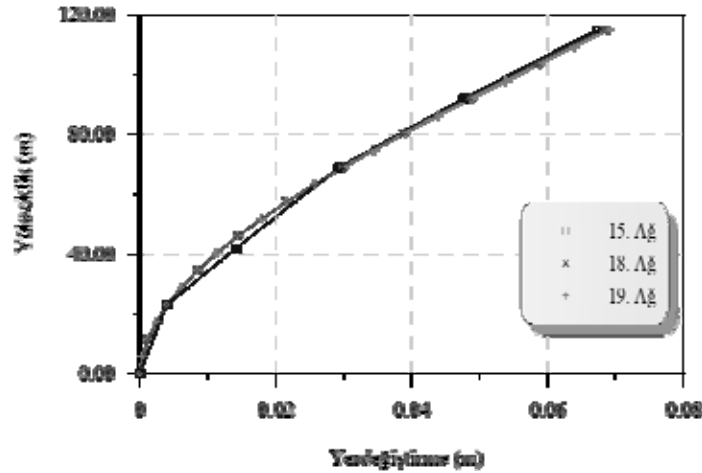


Şekil 21. prEN 1991-1-4 [2]’e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının $y=3.3$ m için von Mises gerilmelerinin farklı ağ yapısı için yükseklik boyunca değişimi

6.5.2. Geliştirilen Program ile TS 498 [1]'e Göre Elde Edilen Doğrusal Olmayan Yayılı Yük Etkisindeki Sanayi Bacasının Statik Analizi

TS 498 [1]'e göre sanayi bacası yüzeyinde elde edilen yükleme yüzeye yayılı olup eğrilikleri, tek doğrultuda kosinüs eğriliğine eşdeğer poliom tabanlı üçüncü dereceden bir eğriliğe sahip olacaktır. Tablo 4'de verilen değerler kullanıldığında yatay kesit boyunca eleman sayısının artırılması sonucu 115 m kotundaki yatay kesit boyunca elde edilen yatay kesitteki yerdeğiştirme ve gerilme değerlerine bakıldığında TS 498 [1]'e göre etkittirilen yüklemede çekme etkisi olmamasına rağmen elde edilen sonuçların yakınsama davranışı ile prEN1991 1-1-4'e göre etkittirilen yüklemelerden elde edilen sonuçların yakınsama davranışının aynı olduğu görülmektedir. Tablo 5'de verilen değerler kullanıldığında yükseklik boyunca y-koordinatının 3,3 m olduğu noktalardaki bulgular ise yerdeğiştirme için Şekil 22'de, von Mises gerilme değerleri için Şekil 23'de verilmektedir.

Şekil 22'den görüldüğü gibi, en büyük yerdeğiştirmenin görüldüğü 115 m kotunda, 19. ağıdaki değer 18. ağıdaki değer ile aynı olup yaklaşık 0,068 m'dir. Şekil 23'den görüldüğü gibi, en büyük von Mises gerilmesinin oluştuğu 0,0 m kotunda 19. ağıdaki değer, 18. ağıdaki değere yaklaşık % 2 yakınlıkta olup yaklaşık 2300000 N/m² (2,3 MPa) dir.

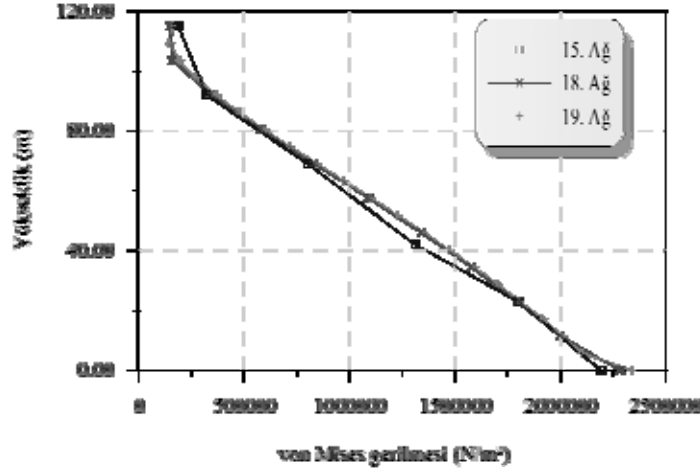


Şekil 22. TS 498 [1]'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının y=3.3 m için yerdeğiştirmesinin farklı ağı yapısı için yükseklik boyunca değişimi

Sanayi bacasında TS 498 [1]'e göre en büyük yerdeğiştirme, yaklaşık 0,068 m ve en büyük von Mises gerilmesi, yaklaşık 2300000 N/m² (2,3 MPa) dir. Buna göre TS 498 [1]'e göre elde edilen yerdeğiştirme ve gerilme sonuçları prEN1991 1-1-4'e göre elde edilenlere göre yaklaşık üç kat daha büyük olmaktadır.

Sanayi bacasının TS 498 [1]'e göre düzgün yayılı yük etkisinde 115 m kotunda ve y-koordinatının 3,3 m olduğu (52 nolu nokta) noktada yanal yerdeğiştirme yaklaşık 0,082 m, von Mises gerilmesi 32500 N/m² iken doğrusal olmayan yük etkisinde aynı noktada yanal

yerdeğiştirme yaklaşık 0,068 m, von Mises gerilmesi yaklaşık 192000 N/m² olmaktadır. Bu durum TS 498 [1]'e belirlenen rüzgâr yükünün, silindirik sanayi bacaları için verilen doğrusal olmayan yük yerine hesapları basitleştirmek amacıyla yükün düzgün yayılı yük olarak uygulanması; yerdeğiştirme ve özellikle gerilme sonuçlarını oldukça değiştirmektedir.



Şekil 23. TS 498 [1]'e göre doğrusal olmayan yük etkisindeki sanayi bacasının y=3.3 m için von Mises gerilmelerinin farklı ağ yapısı için yükseklik boyunca değişimi

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada p-yöntemine dayalı ve Karma Fonksiyon Yöntemi ile zenginleştirilmiş, sürekli veya süreksiz eğrisel yüzeye etkiyen her çeşit doğrusal olmayan yüklemenin dikkate alınabildiği, elastostatik analizlerin içerildiği üçboyutlu problemlerde uygulanabilen, her üç eksende doğrusal yerdeğiştirmelerin serbestlik derecesi olarak tanımlandığı, eğrisel kenar ve/veya yüzeyli olabilen dörtgen prizma şeklindeki bir eleman için geliştirilen sonlu elemanlar programı kullanılmıştır. Bu çalışma kapsamında geliştirilen sonlu elemanlar programı ile dairesel kesite sahip bir sanayi bacası üzerinde doğrusal ve doğrusal olmayan statik yükleme altında statik analizler yapılmıştır. Bu amaç doğrultusunda geliştirilen bilgisayar programının özellikleri ile bu program yardımıyla elde edilen bulgulardan çıkarılan sonuçlar aşağıda verilmektedir

1. Geliştirilen sonlu elemanların yapılan statik analizlerde etkili sonuçlar verdiği görülmektedir.
2. Sanayi bacası üzerinde düzgün yayılı yük durumunda dikkate alınan tüm sonlu eleman tipleri iyi sonuçlar vermekte, özellikle, Lagrange, hiyerarşik Lagrange ve hiyerarşik Legendre elemanları yakınsama karakteristikleri ile öne çıkmaktadır.
3. TS 498 [1]' e göre belirlenen rüzgâr yükünün, silindirik sanayi bacaları için verilen doğrusal olmayan yük yerine hesapları basitleştirmek amacıyla yükün

düzgün yayılı yük olarak uygulanması; yerdeğiştirme ve özellikle gerilme sonuçlarını oldukça değiştirmektedir.

4. TS 498 [1] ve prEN 1991-1-4 [2]'e göre belirlenen doğrusal olmayan rüzgar yükü altında yerdeğiştirme ve gerilme açısından TS 498 [1], prEN 1991-1-4 [2]'e göre yaklaşık üç kat daha büyük sonuçlar vermektedir.

Semboller

c_{pe}	Dış basınç için basınç katsayısı
c_{pi}	İç basınç için basınç katsayısı
dA	Fiziksel koordinatlarda sonsuz küçük yüzey alanı
$d\mathbf{X}_g d\xi_i$	Hacim elemanın bir yüzeyindeki tanjant vektörü
$f_1(x), f_2(x)$	Bir boyutlu yük fonksiyonları
\mathbf{g}	Kütle kuvvetini doğuran yerçekimi ivmesi
$\mathbf{n}, \bar{\mathbf{n}}$	Yüzey normali, normal vektörü
$N_{\text{yüzey}}$	Hacim elemanın bir yüzeyinde tanımlanan enterpolasyon fonksiyonu
$N^i(\xi)$	Şekil fonksiyonu
p	Polinomun derecesi
$q_p(z_e)$	Referans yüksekliğindeki en yüksek rüzgâr basıncı
$q_p(z_i)$	İlgili referans yüksekliğindeki en yüksek rüzgâr basıncı
$\bar{\mathbf{r}}_{11}, \bar{\mathbf{r}}_{12}$	Yarıçap konum vektörleri
$t_{\text{yüzey}}$	Hacim elemanın bir yüzeyinde enterpolasyon noktaları yük değerleri
u	Yerdeğiştirme
u^c	Elemandaki yerdeğiştirme
\mathbf{t}^*	Etki yüzeyindeki dış kuvvet
$\dot{\mathbf{u}}$	Hız
$\ddot{\mathbf{u}}$	İvme
w_e	Dış rüzgâr basıncı
w_i	İç rüzgâr basıncı
\mathbf{X}	Ortogonal koordinat eksen takımı
$\mathbf{X}_m^{V_i}$	Köşe noktalarının enterpolasyon fonksiyonu
$\mathbf{X}_m^{E_i}$	Doğrusal olmayan kenarların enterpolasyon fonksiyonu
$\mathbf{X}_m^{F_i}$	Doğrusal olmayan yüzeylerin enterpolasyon fonksiyonu

z_e	Dış basınç için referans yüksekliği
z_i	İç basınç için referans yüksekliği
ξ	Doğal koordinatlar
φ_i	Doğal koordinatlarda doğrusal olmayan geometri fonksiyonu
Γ_σ	Ortamın statik sınır yüzeyi
$\nabla \mathbf{u}$	Yerdeğiştirmenin gradiyenti
$\delta \boldsymbol{\varepsilon}, \nabla^{\text{sym}} \mathbf{u}$	Yerdeğiştirmenin gradiyentinin simetrik kısmı
$\delta \mathbf{u}$	Elemandaki sanal yerdeğiştirme
δW_{ext}	Dış kuvvetlerin yaptığı virtüel iş
$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$	Enterpolasyon fonksiyonları
Ω	Sürekli ortam
$\Psi_{\lambda a}$	Köşe etki faktörü

Teşekkür

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından doktora bursu ile desteklenmiştir.

Kaynaklar

- [1] TS 498, Yapı Elemanlarının boyutlandırılmasında Alınacak Yüklerin Hesap Değerleri, TSE ICS 91.040, Ankara, 1997.
- [2] prEn 1991-1-4, Eurocode 1:Actions On Structures-Part 1-1: General Actions-Densities, Self-Weight, Imposed Loads For Buildings, EN, Brussels, 2002.
- [3] Babuška, I. ve Suri, M., 1994. The p and h-p Versions of the Finite Element Method, Basic Principles and Properties, SIAM Review, 36, 4, 578-632.
- [4] Gupta, A.K., Fang, T.H. ve Chen, H., 1991. Computational Efficiency of p- and h-Version Elements, Communications in Applied Numerical Methods, 7, 2, 87-92.
- [5] Houmat, A., 2004. Three-Dimensional Hierarchical Finite Element Free Vibration Analysis of Annular Sector Plates, Journal of Sound and Vibration 276, 181-273.
- [6] Rank, E., Düster, A., Nübel, V., Preusch, K. ve Bruhns, O.T., 2005. High Order Finite Elements For Shells, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194, 2494-2512.
- [7] Babuška, I. ve Dorr, M.R., 1981. Error Estimates for The Combined h and p Versions of The Finite Element Method, Numerische Mathematik, 37, 2, 257-277.

- [8] Babuška, I., Griebel M. ve Pitkaranta, J., 1989. The Problem of Selecting the Shape Functions for a p-type Finite Element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 1891-1908.
- [9] Babuška, I. ve Suri, M., 1987. The Optimal Convergence Rate of The p-Version of The Finite Element Method, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 27, 4, 750-776.
- [10] Babuška, I., Szabó, B.A. ve Katz, I.N., 1981. The p-Version Finite Element Method, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 18, 515-545.
- [11] Carnevali, P., Morris, R.B., Tsuji, Y. ve Taylor, G., 1993. New Basis Functions and Computational Procedures for p-Version Finite Element Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 3759-3779.
- [12] Chilton, L. ve Suri, M., 1997. On The Selection of A Locking-free hp Element for Elasticity Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 2045-2062.
- [13] Deuffhard, P., Leinen, P. ve Yserentant, 1988. Concepts of An Adaptive Hierarchical Finite Element Code, Technical Report SC-88-5, Konrad-Zuse-Zentrum, Berlin, Germany.
- [14] Duarte, C.A., Babuška, I. ve Oden, J.T., 2000. Generalized Finite Element Methods for Three-Dimensional Structural Mechanic Problems, *Computers and Structures*, 77, 2, 215-232.
- [15] Promwungkwa, A., 1998. Data Structure and Error Estimation For An Adaptive p-Version Finite Element Method in 2-D and 3-D Solids, Doktora Tezi, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.
- [16] Rank, E., Düster, A., Nübel, V., Preusch, K. ve Bruhns, O.T., 2005. High Order Finite Elements For Shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 2494-2512.
- [17] Rank, E., Rucker, M., Düster, A. ve Bröker, H., 2001. The Efficiency of The p-Version Finite Element Method in A Distributed Computing Environment, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52, 589-604.
- [18] Robinson, J., 1986. An Introduction to Hierarchical Displacement Elements and the Adaptive Technique, *Finite Elements in Analysis and Design*, 2, 377-388.
- [19] Szabó, B.A., 1990. The p- and h-p Versions of the Finite Element Method in Solid Mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 80, 185-195.
- [20] Szabó, B.A. ve Babuška, I. 1991. *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 368 s.
- [21] Netz, T., Düster, A., ve Hartmann, S., 2013. High-order finite elements compared to low-order mixed element formulations, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 93, 2-3, 163-176.
- [22] Watkins, D.S., 1974. *Blending Functions and Finite Elements*, Doktora Tezi, The University of Calgary, Alberta.

- [23] Cavendish, J.C. ve Wixom, J.A., 1975. Finite Element Mesh Generation For Planar and Shell Type Structures, General Motors Research Laboratories, Warren, Michigan.
- [24] S., Bekiroğlu, “p-Yöntemine Dayalı Üç Boyutlu Sonlu Elemanlar İle Yapıların Elastostatik ve Elastodinamik Analizi” Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, 2010.
- [25] Gordon, W., 1971. Blending-Function Methods of Bivariate and Multivariate Interpolation and Approximation, SIAM Journal on Numerical Analysis, 8, 1, 158-177.
- [26] Gordon, W. ve Hall, C., 1973a. Construction of Curvilinear Co-ordinate Systems and Applications to Mesh Generation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 7, 4, 461-477.
- [27] Gordon, W. ve Hall, C., 1973b. Transfinite Element Methods: Blending-Function Interpolation over Arbitrary Curved Element Domains, Numerische Mathematik, 21, 109-129.
- [28] Marshall, J.A. ve Mitchell, A.R., 1978. Blending Interpolants in Finite Element Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12, 1, 77-83.
- [29] Cavendish, J.C. ve Hall, C.A., 1984. A New Class of Transitional Blended Finite Elements for The Analysis of Solid Structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20, 2, 241-253.
- [30] Cavendish, J.C. ve Hall, C.A., 1984. A New Class of Transitional Blended Finite Elements for The Analysis of Solid Structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20, 2, 241-253.
- [31] Dey, S., 1997. Geometry-Based Three-Dimensional hp-Finite Element Modeling and Computations, Doktora Tezi, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York.
- [32] Düster, A., 2001. High Order Finite Elements For Three-Dimensional, Thin-Walled Nonlinear Continua, Doktora Tezi, Technische Universität München, Germany.
- [33] Királyfalvi, G. ve Szabó, B.A., 1997. Quasi-Regional Mapping For The p-Version of The Finite Element Method, Finite Elements in Analysis and Design, 27, 85-97.
- [34] Liu, Y., 1998. p-Adaptive Hybrid/Mixed Finite Element Method, Doktora Tezi, The Ohio State University, ABD.
- [35] Alfeld, P., 1985. Multivariate Perpendicular Interpolation, SIAM Journal on Numerical Analysis, 22, 1, 95-106.
- [36] Mäkipelto, J., 2005. Exact Geometry Description With Unstructured Triangular Meshes For Shape Optimization, 11th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro.
- [37] Daniş, H. ve Görgün, M., 2005. Marmara Depremi ve Tüpraş Yangını, Deprem Sempozyumu, Kocaeli, 1362-1369.